VI-032 - IMPORTÂNCIA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA O ESTUDO DAS QUESTÕES AMBIENTAIS

Hélio Oliveira Rodrigues
Graduação em Matemática pela Universidade Católica de Pernambuco (UNICAP). Especialista em Ensino de Matemática pelas Faculdades Integradas de Vitória de Santo Antão (FAINTVISA). Mestre Profissional em Meio Ambiente pelo Instituto de Tecnologia de Pernambuco (ITEP). Doutorando pela Universidad UDELMAR (Chile). Professor da Secretaria de Educação de Pernambuco e Professor da graduação e Pós-graduação das Faculdades Integradas de Vitória de Santo Antão.

Endereço: Rua – Marquês de Baependy, 176 Campo Grande – Recife – PE – CEP 52040-080 – Brasil – Tel: (81) 32432779. e-mail: helioosr@hotmail.com

RESUMO

Muitos dos princípios em ciências e em engenharia dizem respeito a relações entre quantidades, as quais estão sempre variando. Uma vez que taxas de variação são matematicamente representadas por derivadas, não é surpreendente que tais princípios estejam freqüentemente expressos em forma de Equações Diferenciais. Neste trabalho serão apresentados alguns modelos matemáticos importantes, que envolvem a aplicação dessas equações voltadas para a resolução de problemas de questões ambientais, mostrando não só, a importância de suas aplicações nesse campo do conhecimento, mas também, sua aplicação a partir da resolução numérica através do software MAPLE, utilizando seus principais comandos, soluções exatas e gráficas, com a perspectiva de contribuir de forma significativa com a construção do conhecimento.

PALAVRAS-CHAVES: Equações Diferenciais; Modelagem Matemática; Questões Ambientais.

INTRODUÇÃO

Na idade antiga, às necessidades da sociedade impulsionou a busca pelo desenvolvimento dos modelos matemáticos para explicar as observações do mundo físico, na tentativa de se obter uma melhor compreensão dos fenômenos da natureza. Neste sentido, a enorme complexidade dos problemas ecológicos tem sido uma grande barreira para a compreensão dos problemas ambientais, desta forma, a modelagem matemática como uma forte ferramenta vem dando grandes contribuições, não só para organizar informações, mas também, para fazer previsões nas mais diferentes situações.

Os mais variados tipos de modelos matemáticos existentes se fundamentam em Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e Parciais (EDPs). As Equações Diferenciais Ordinárias se destacam nas aplicações de sistemas ecológicos, onde no desenvolvimento de modelos dessa natureza, a condição de contorno é de fundamental importância para se chegar a obtenção de um modelo eficiente e realista. As Equações Diferenciais Parciais, normalmente apresentam várias limitações, tendo-se em vista a grande variabilidade de parâmetros, propriedades dos materiais e das condições de contorno. Assim, neste trabalho tem como objetivo realizar um estudo sobre a importância das Equações Diferenciais, bem como a sua aplicabilidade na resolução de problemas que envolvam as questões ambientais e posteriormente sugerir alternativas que possibilitem um maior aprofundamento neste campo de estudo e conseqüentemente, se chegar a uma melhor compreensão sobre tais problemas.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nos últimos 300 anos, as equações diferenciais se constituíram, como um dos mais importantes ramos da matemática, por ser uma ferramenta de alta importância para as ciências físicas tendo suas múltiplas aplicações tanto no campo da matemática pura, quanto na aplicada. Os fundamentos deste assunto, segundo alguns autores estão dominados graças as contribuições do grande matemático Leonhard Euler (Séc. XVIII). Muitos foram os matemáticos que contribuíram com o desenvolvimento das Equações Diferenciais, mas os conhecimentos de Euler foram de alta relevância para que se pudesse entender o cálculo e a análise, para que fossem desenvolvidas as idéias fundamentais e a partir daí, fossem produzidas novas idéias além do seu entendimento.

Segundo Boyer (1996), o cálculo surgiu no século XVII, a partir dos conhecimentos matemáticos de Fermat, Newton e Leibniz, por estes matemáticos entenderem que o conceito de derivada estava relacionado com o estudo das proporcionalidades e conseqüentemente, desenvolverem estes estudos a partir das Equações Diferenciais. Ao longo do tempo foi descoberto que as soluções para este tipo de equações não eram tão fáceis, as manipulações simbólicas e as simplificações algébricas ajudavam, mas não eram suficientes para concretizar tais estudos. A integral, antiderivada teve um papel importante quando no desenvolvimento do Teorema Fundamental do Cálculo, por oferecer ajuda direta e principalmente quando as variáveis da equação eram separadas. O método das generalizações das variáveis foi desenvolvido por Jakob Bernoulli e generalizado por Leibniz no século XVII.

No início do século XVIII, pesquisadores das Equações Diferenciais começaram a aplicar estes tipos de equações a problemas relacionados com a astronomia e ciências físicas. Bernoulli por exemplo estudou e escreveu cuidadosamente as equações diferenciais para o movimento planetário, usando os princípios de gravidade e momento desenvolvidos por Newton. O trabalho de Bernoulli incluiu o desenvolvimento da catenária e o uso de coordenadas polares. Nesta época, as equações diferenciais estavam interagindo com outros tipos de matemática e ciências, para resolver problemas aplicados significativos. Por exemplo, Halley as utilizou para analisar a trajetória de um cometa que hoje leva seu nome. Johann Bernoulli, foi provavelmente o primeiro matemático a entender o cálculo de Leibniz e os princípios de mecânica para modelar matematicamente fenômenos físicos usando Equações Diferenciais para encontrar suas soluções. Já Taylor usou Séries para "resolver" Equações Diferenciais e outros matemáticos desenvolveram e utilizaram as Séries para vários propósitos. Contudo, o desenvolvimento de Taylor a partir de estudos das diferenças finitas criou um novo ramo da matemática intimamente relacionado ao desenvolvimento das Equações Diferenciais.

Pastor y Babini (2000), afirma que ao aprofundar muitas das idéias de Euler em 1728, Daniel Bernoulli usou os métodos desenvolvidos por Euler, para ajudá-lo a estudar oscilações e as Equações Diferenciais que produzem alguns tipos de soluções aproximadas. Um outro trabalho desenvolvido a partir dos mesmos conhecimentos foi o de D'Alembert em física matemática, que envolveu Equações Diferenciais parciais e explorações por soluções das formas mais elementares. Lagrange seguiu de perto os passos de Euler, desenvolvendo mais teorias e estendendo resultados em mecânica e especialmente em equações de movimento (problema dos três corpos) e energia potencial.

As maiores contribuições de Lagrange foram provavelmente à definição de função e propriedades, ou seja, o que manteve o interesse em generalizar métodos e analisar novas famílias de Equações Diferenciais. Lagrange foi provavelmente o primeiro matemático com conhecimento teórico e ferramentas suficientes para ser considerado um verdadeiro analista das Equações Diferenciais e com sua incomensurável sabedoria em 1788 introduziu equações gerais de movimento para sistemas dinâmicos, hoje conhecidos como equações de Lagrange. O trabalho de Laplace, também sobre a estabilidade do sistema solar, fundamentado nos conhecimentos anteriores levou a mais avanços, incluindo técnicas numéricas melhores e um melhor entendimento de integração. Em 1799, Laplace introduziu as idéias de um laplaciano de uma função e claramente reconheceu as raízes de seu trabalho quando escreveu "Leia Euler, leia Euler, ele é nosso mestre".

O trabalho de Legendre sobre as equações diferenciais foi motivado pelo movimento de projéteis, levando em conta novos fatores, como resistência do ar e velocidades iniciais. Um outro matemático que deu grandes contribuições aos estudos das Equações Diferenciais foi Lacroix, que trabalhou em avanços nas equações diferenciais parciais e incorporou muitos a esses estudos muitos conhecimentos desde os tempos de Euler, sintetizando muitos dos resultados deixado por Euler, Laplace e Legendre. Fourier, em sua pesquisa matemática deu contribuições importantes ao estudo e cálculos da difusão de calor e à solução de equações diferenciais. Muito deste trabalho aparece em *The Analytical Theory of Heat* (A Teoria Analítica do Calor,1822) de Fourier, no qual ele faz uso extensivo da série que leva seu nome e este resultado foi uma ferramenta importante para o estudo de oscilações. As contribuições de Charles Babbage vieram por uma rota diferente, elas desenvolveu uma máquina de calcular chamada de Máquina de Diferença que usava diferenças finitas para aproximar soluções de equações, quando o próximo avanço importante neste assunto ocorreu no início do século 19, quando as teorias e conceitos de funções de variáveis complexas se desenvolveram.

Joseph (1996), em suas considerações afirma que os babilônios muitos séculos antes de Cristo já resolviam equações lineares e não lineares, mas as equações não lineares até pouco tempo criaram grandes obstáculos no campo da matemática e Poincaré, o maior matemático de sua geração fez grandes estudos sobre as referidas equações, produzindo inclusive mais de 30 livros técnicos sobre física matemáticas e mecânica celeste. A maioria destes trabalhos envolveu o uso e análise de equações diferenciais. Em mecânica celeste, trabalhando com os resultados do astrônomo americano George Hill, conquistou a estabilidade das órbitas e iniciou a teoria qualitativa de equações diferenciais não lineares. Muitos resultados de seus trabalhos foram as sementes de novas maneiras de pensar, as quais floresceram, estudos sobre à análise de séries divergentes e equações diferenciais não lineares. Poincaré deu grandes contribuições a quatro áreas importantes da matemática, ou seja, análise, álgebra, geometria e teoria de números. Ele tinha um domínio criativo de toda a matemática de seu tempo e foi, provavelmente, a última pessoa a estar nesta posição. No século 20, George Birkhoff com seu grande conhecimento, utilizou as idéias de Poincaré para analisar sistemas dinâmicos grandes e estabelecer uma teoria para a análise das propriedades das soluções destas equações.

UM BREVE ESTUDO SOBRE MODELO E MODELAGEM

Nas últimas décadas o movimento da modelagem matemática nacional e internacionalmente tem se desenvolvido bastante, contando com contribuições importantes de matemáticos aplicados que migraram para à área da Educação Matemática (BLUM & NISS, 1991; FIORENTINI, 1996). No Brasil, a modelagem matemática está ligada à noção de trabalho de projeto. (BASSANEZI, 1990, BIEMBENGUT, 1990, 1999; BORBA, MENEGGHETTI & HERMINI, 1997, 1999).

Para Dambrózio (1986), os modelos podem ser modificados, aprimorados ou substituídos por outros para se obter uma compreensão correta daquilo que está ocorrendo na natureza. O desenvolvimento de modelos matemáticos para explicar as observações do mundo físico teve grande avanço desde tempos antigos.

Alguns autores afirmam, que a matemática teve o seu progresso intimamente associado ao esforço para a compreensão dos fenômenos naturais, graças aos espíritos inquiridores de pensadores que não se contentaram apenas com as descrições qualitativas dos mesmos. Desde tempos antigos, a geometria, por exemplo, tem sido desenvolvida para tratar de problemas de mensuração para calcular áreas de terras e volumes de celeiros. A linguagem concisa, precisa e abrangente - em termos de símbolos (ou notações) - da matemática tem sido útil para elaborar idéias e metodologias para compreender e explorar o mundo físico.

Não foi sem razão que Galileu defendeu ardentemente uma descrição quantitativa - e dedutiva - dos fenômenos naturais que pudesse ser preditiva (utilizando fórmulas matemáticas), deixando de lado a comodidade de descrições apenas qualitativas e factuais dos fenômenos. Uma vez que a compreensão de fenômenos naturais deve ser baseada em idéias desenvolvidas a partir de intuições (pensamento novo) e conhecimentos já adquiridos, o uso de modelos é de grande valia. Os modelos matemáticos são desenvolvidos a partir de uma elaboração cuidadosa de idéias voltadas para partes do fenômeno, que permitirão a aferição das suas hipóteses em confronto com as observações.

A lei da atração gravitacional por exemplo é um resultado de modelagem matemática e a sua importância deve-se ao fato de ser uma lei universal que consegue explicar tanto o movimento das estrelas e galáxias quanto o movimento de pequenos objetos em queda livre na terra.
O extraordinário desenvolvimento dos modelos matemáticos deve-se ao fato de que os fenômenos naturais envolvem seres inanimados que são passíveis de serem observados repetitivamente. Embora tenhamos uma idéia do que seja um modelo matemático é importante conceituarmos a palavra modelo. Segundo alguns autores, a palavra modelo é popularmente usada para designar algo perfeito ou muito próximo a perfeição.

A ecologia estuda as relações entre os seres e o meio ambiente, inclusive o homem, essas interações ocorrem em diferentes níveis, por exemplo, no nível mais básico, organismos individuais interagem uns com os outros e com o meio físico de Indivíduos de uma mesma espécie vivendo numa mesma área interagem normalmente de forma semelhante e independente, por isso, as interações podem ser agregadas, originando as interações ao nível das populações.

As populações de diferentes espécies, convivendo numa mesma área, também produzem em geral, padrões definidos de interações que dizemos pertencer ao nível das comunidades, as comunidades e os fatores físicos com os quais elas se interagem se unem funcionalmente formando os ecossistemas, sistemas estes, de alta complexidade que acabam toda rede de inter-relações que sustentam a vida, em qualquer lugar onde ela exista

(JORGENSEN, 1997). A complexidade dos sistemas ecológicos tem sido uma grande problemática para se obter uma melhor compreensão e gerenciamento do meio ambiente, neste sentido, a modelagem matemática pode ser caracterizada como uma poderosa ferramenta, não só pela capacidade de organizar as informações, mas também, por fazer importantes previsões nas mais diversas condições.

ECOSSISTEMAS E MODELAGEM ECOLÓGICA

A modelagem matemática voltada para o meio ambiente evoluiu através de diferentes campos, por exemplo, no campo da ecologia, que apresenta vários níveis hierárquicos, a modelagem evoluiu através de estudos de populações, comunidades e ecossistemas, onde os primeiros modelos aplicados às populações foram o de Malthus de 1978 e o de Verhulst de crescimento logístico de 1928, sendo este último elaborado por Verhulst e muito estudado no século XX.

Odum (1969), atribuiu 24 características quantificáveis aos ecossistemas, permitindo aferir seus estágios de maturidade. Assim, desde aquela época até os nossos dias, funções emergentes como ascendência e exergia tentam sintetizar as informações sobre fluxos de energia e biomassa em relação a um estado de clímax teórico.

O primeiro modelo matemático a ser apresentado à Ecologia foi o modelo de Malthus (1798), esse modelo tem grande significado para a ecologia, por prever o crescimento populacional, baseando-se em Equações Diferênciais muito simples, ou seja:

$$\partial N_t/\partial t = r.N_{t.} \quad \text{, isto, para } t = 0 \text{ e } N_t = N_0 \qquad \text{Equação (5.1)}$$

Onde:
N_t = número de indivíduos da população no instante t;
N_0 = número inicial de indivíduos da população;
r = razão intrínseca (r = b – d, onde b é a taxa de nascimento e d é a taxa de mortalidade).

Portanto, o uso de modelos matemáticos como hipótese de trabalho é de fundamental importância para a implantação de estudos interdisciplinares e com base em tais modelos, alguns autores afirmam que é possível fazer um delineamento experimental de coleta de dados, que seja equilibrada e objetiva na busca dos valores necessários para que sejam estabelecidos os consideráveis parâmetros do modelo.

ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS EM MODELOS ECOLÓGICOS E BIOLÓGICOS BASEADOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Para se obter um modelo de fato representativo de um sistema em estudo é necessário que os valores dos parâmetros sejam escolhidos de forma adequada. Isto geralmente não é uma tarefa fácil, principalmente quando se trata de modelos ecológicos. Desta forma existem diferentes formas a serem abordadas, que podem ser utilizadas para se obter estimativas reais de valores, para os parâmetros de um modelo ecológico. Segundo Jorgensen (1997), os parâmetros são estabelecidos a partir da necessidade do modelo e de estudos que são fruto do real funcionamento do sistema. Entretanto, poucos são os parâmetros que podem ser estimados devido a problemas logísticos, associados à observação em campo, de muito dos fenômenos que podem ser de interesse num modelo ecológico.

As Equações Diferenciais Ordinárias são de fundamentais importâncias para os estudos dos modelos ecológicos, porém, não se pode afirmar com certeza que são mais utilizadas do que as equações algébricas, matrizes ou distribuições de probabilidade, mesmo sabendo da sua influencia para o desenvolvimento da própria teoria ecológica. Apesar de se saber que o uso de EDOs na modelagem ecológica está basicamente associado a construção de modelos causais, determinísticos dinâmicos e agregados para outros aspectos do sistema, sabe-se que vários motivos levam a construção de modelos ecológicos com tais características e o maior deles, se caracteriza por os modelos ecológicos possuírem grandes quantidades de componentes, unidos por forte redes de interações.

Geralmente, não é fácil se tratar de modelos ecológicos, devido às dificuldades para obtenção de informações sobre os sistemas. Para se obter um modelo representativo do sistema é necessário que os valores dos parâmetros sejam escolhidos de forma adequada, desta forma, as variáveis que podem ser medidas como mão-

de-obra especializada, etc.,são diferentes abordagens que podem ser utilizadas para obter estimativas realistas de valores para os parâmetros de um modelo ecológico.
Experimentos e observações realizadas em laboratório se apresentam como a segunda forma apropriada de estimar parâmetros para um modelo ecológico. No ambiente controlado do laboratório é muito mais fácil resolver problemas logísticos associados a observações necessárias para se chegar à estimativa de determinados parâmetros, porém, surgirão incertezas por não se estar estudando um sistema completo. Os parâmetros biológicos além de serem mais sensíveis, em geral são influenciados por uma gama maior de fatores ambientais, que com freqüência podem interagir de uma forma sinérgica. Desta forma, a confiabilidade dos parâmetros biológicos é ainda afetada pelo fato dos organismos vivos estarem em constantes mudanças (WARREN, 1971).

MATERIAL E MÉTODOS

A metodologia adotada neste trabalho foi desenvolvida com o objetivo de, a princípio mostrar a importância das Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais para o estudo e resolução dos problemas ambientais e posteriormente relacionar os aspectos relevantes nesse campo do conhecimento, utilizando um procedimento computacional. Nestas áreas têm se destacado alguns ambientes computacionais interativos de simulação que permitem a exploração de conexões entre o modelo e o comportamento real do sistema, como MATLAB, MATHEMÁTICA e o MAPLE. Desta forma, para mostrar a importância das equações diferenciais na resolução de problemas das questões ambientais foi desenvolvida neste trabalho, uma ferramenta computacional e implementada através da utilização do software Maple. A escolha do Maple como ambiente para o desenvolvimento da ferramenta se deram aos seguintes motivos:

a) O Maple é muito usado para a computação de expressões algébricas, simbólicas e cálculo numérico permitindo inclusive o desenho de gráficos a duas ou a três dimensões, oferecendo uma visualização matemática interativa tornando-se uma importante ferramenta para usuários nos campos da educação, pesquisa e indústria.
b) É de fácil compreensão e utilização, sendo ideal para pesquisadores por ser um ambiente de matemática completo para resolução de problemas e possuir uma imensa variedade de operações matemáticas que além de resolver equações diferenciais, derivação e integração tem a capacidade de calcular soluções tanto analíticas como numéricas para equações diferenciais ordinárias (EDOs) e parciais (EPDs), solucionando sistemas de equações diferenciais, inclusive às condições iniciais e de contorno.
c) A disponibilidade de diversos recursos, como boas ferramentas de visualização, rotinas para ordenação de vetores e cálculos, que facilitam o trabalho de programação.

UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE MAPLE PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS A PARTIR DE UMA QUESTÃO AMBIENTAL

Nos últimos anos o desenvolvimento de softwares tem proporcionado muitas mudanças nas formas das pessoas resolverem problemas. Neste sentido, profissionais na área da engenharia têm trazido grandes benefícios e principalmente novas ferramentas para as áreas de processamento de sinais, modelagem de sistemas dinâmicos, identificação e controle de sistemas dinâmicos. Desta forma neste momento serão apresentadas duas aplicações numéricas envolvendo um modelo matemático, onde além da aplicação numérica serão feitas representações gráficas, através do software MAPLE, para melhor caracterizar o objetivo deste trabalho.

APLICAÇÃO NUMÉRICA

Em Ecologia, quando se procura determinar o sistema a ser modelado, pode-se pensar em três níveis, ou seja, população, comunidade e ecossistema. Desta forma, Malthus (1978), para prever o crescimento populacional baseou-se na equação dada pela forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{N}(t) = r\,\mathrm{N}(t)$$, para t = 0 e N(t) = N (0).

Considere uma população de presas que precisa ser controlada, em virtude da degradação causada numa lavoura. Ao ser iniciado o combate através de predadores foi observado que num lote de 120.000 presas 20.000 delas foram eliminadas em 10 dias, isto, seguindo um combate entre predador e presa proporcionalmente a cada instante. Necessitando voltar a desenvolver suas atividades com segurança, o agricultor contratou uma empresa para fazer uma investigação e estimar previsões a partir de três situações. A primeira, verificar em quanto tempo as presas estariam reduzidas a metade, para que ele pudesse reiniciar um novo plantio. A segunda, estimar a quantidade de presas restantes após 30 dias de combate e a terceira, fazer uma descrição gráfica para que pudesse ser observado o controle da situação.

a) O tempo necessário para que as presas sejam reduzidas a metade da população inicial;

> **eq1:=diff(N(t),t)=r*N(t);**

$$eq1 := \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{N}(t) = r\,\mathrm{N}(t)$$

> **eq1.1 := dsolve({eq1, N(0)=120000},N(t));**

$$eq11 := \mathrm{N}(t) = 120000\,\mathbf{e}^{(r\,t)}$$

> **solve(subs(N(t)=100000,t=10,eq1.1),{r});**

$$\{r = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{5}{6}\right)\}$$

> **eq1.2 := subs(%,eq1.1);**

$$eq12 := \mathrm{N}(t) = 120000\,\mathbf{e}^{\left(\frac{1}{10}\ln\left(\frac{5}{6}\right)t\right)}$$

> **evalf(solve(subs(N(t)=60000,eq1.2),{t}));**

$$\{t = 38.01784017\}$$

b) Seguindo esta modalidade de combate, qual a quantidade de presas restantes após decorrerem 30 dias;

> **subs(t=30,eq1.2);**

$$\mathrm{N}(30) = 120000\,\mathbf{e}^{\left(\frac{3}{4}\ln\left(\frac{5}{6}\right)\right)}$$

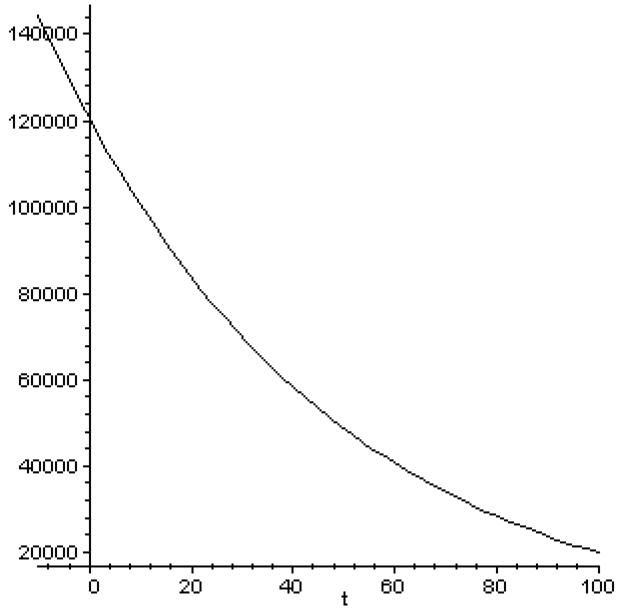
> **evalf(%);**

$$\mathrm{N}(30) = 104663.5139$$

c) Representação gráfica da situação

> **plot(120000*exp(1/10*ln(5/6)*t),t=-10..100);**

Gráfico 13 – Representação geométrica do comportamento da função



No Gráfico da função, N(t), representa a população de presas, para o intervalo -10 < t < 100 dias.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES

As Equações Diferenciais Parciais (EDOs) são de fundamental importância para que sejam estudados vários fenômenos da natureza, nas mais diferentes áreas de aplicação. No presente estudo isto pode ser observado a partir do momento que elas exercem um papel importante para se estudar os fenômenos ambientais e um exemplo pode ser dado, quando no campo da resolução computacional se faz necessário discretizar o domínio com uma malha de pontos em situações reais. Para que sejam estudados os efeitos de longo prazo. As Equações Diferenciais Parciais podem ser classificadas em Elípticas, Parabólicas e Hiperbólicas, evolutivas com características difusas ou convectiva. No campo da engenharia as soluções podem obtidas através do método dos modelos finitos, que são modelados matematicamente com a intenção de descrever os fenômenos físicos que envolvem particularmente casos em estudo, como a intensão de determinar a variabilidade das tensões de uma peça mecânica e suas respectivas deformações, a distribuição do fluxo de temperatura em uma placa metálica, o fluxo de água num meio poroso, entre outros. A solução analítica dessas equações diferenciais, em sua grande maioria é impossibilitada, pela grande dispersão das propriedades dos materiais e da complexa geometria que envolve os sistemas ambientais. Desta forma, diante da grande utilização de métodos numéricos, no qual se tem à substituição da solução exata analítica, por uma solução aproximada, em especial pode ser destacado o método dos elementos finitos, que se apresenta como uma das melhores ferramentas disponíveis para solução dos mais variados problemas. Neste sentido, neste trabalho sugere-se, a partir da fuga de uma formalização tradicional conservadora acadêmica, em direção ao entendimento conceitual que venha contemplar a gênese do conhecimento e o desenvolvimento dos conteúdos na sua crítica e elaboração contextual, transdissiplinar e cultural, para uma maior interação sobre os fundamentos de sistemas dinâmicos na tentativa de motivar estudantes pesquisadores a aproveitar as potencialidades do software MAPLE, não apenas para resoluções de questões ambientais, mas utilizar seus métodos nos cursos de graduação, fazendo o desenvolvimento das aplicações numéricas a partir desta ferramenta, por esta se adequar de forma inconstetavel a resolução interativa de problemas, sendo de grande importância para obtenção instantânea de gráficos, onde os resultados desejados vão desde as mais simples modificações na parametrização das situações, até as grandes mudanças de contextos possibilitando o desenvolvimento de experimentos e auxiliando no estudo do comportamento das funções, dando grandes contribuições nas áreas de Engenharia de Controle e Automação, Elétrica, Mecânica e Computação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BASSANEZI, R. C. **O que pensam os professores sobre modelagem matemática**, In: Actas de la Séptima Conferencia Internacional Sobre Educacion Matemática. Paris: UNESCO, 1990. p. 130-155.
2. BIEMBENGUT, M. S. **Modelação Matemática como método de ensino-aprendizagem de matemática em cursos de 1º e 2º graus**. Rio Claro: IGCE/UNESP, 1990, 210p. (Dissertação de Mestrado).
3. BLUM, W. & NISS, M. **Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects** – state, trends and issues in mathematics instruction. Educattional Studies in mathematics, Dordrecht, v. 22. n. 1, p. 3768, 1991.
4. BOYER, CARL B. **História da matemática**. São Paulo, Editora Edgar Blucher, 1996.
5. BORBA, M. C., MANEGHETTI, R. C. G., HERMINI, H. A. **Estabelecendo critérios para avaliação do uso de modelagem em sala de aula**: estudo de um caso em um curso de ciências bilógicas. In: BORBA M. C. Calculadoras gráficas e educação matemática, (Série Reflexão em Educação matemática). Rio de Janeiro: USU, Ed. Bureau, p. 95-113. (1999).
6. BIEMBENGUT, M. S. Modelagem Matemática & implicações no ensino-aprendizagem de matemática. Blumenau: Editora da UFRB, 1999. 134p.
7. BALBINI, J. & PASTOR, J., **História da Matemática: De la antiguidad a la baja Edad Media**, v. 2. Barcelona: gedisa, 2000.
8. DAMBROZIO, **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática**. 2ª ed. Campinas: UNICAMP, São Paulo: Summus, 1986.
9. FIORENTINI, D. **Brasilian research in mathematical modelling**. Paper presented in the GT-17/ICME-8, Sevilla, Spain, 1996, 20p. (mimeo).
10. JOSEPH, GEORGE GHEVERGHESE. **La Cresta del Pavo Real – Las Matemáticas y sus Raíces no Europeas**. Ediciones Pirâmide, S. A., 1996, Spain – Madrid.
11. JORGENSEN, S. E. **Integration of Ecossistem Theories**: A Pattern 2ª Ed., Dordretch, Holanda, Kluwer Academic Publishers, 1997.
12. WARREN, C. E. **Biology and Water Pollution Control. Philadelphia**, W. B. Saunders, Co. 1971.
13. MALTHUS, T. R. **An essay on the principle, as it affectrs the future improvement os societty**, with remarks on the speculaions of Mrs. Godwin, M. Condorcet and Others Writer