

## I-334 - PROPOSTA E ANÁLISE DE MODELO MATEMÁTICO MONODISPERSO PARA A REMOÇÃO DE PARTÍCULAS NA FILTRAÇÃO ASCENDENTE

**Alexandre Botari<sup>(1)</sup>**

Engenheiro Civil e Licenciado em Ciências exatas com ênfase em Matemática pelo IFSC/USP. Doutor em Hidráulica e Saneamento pela Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo (EESC/USP). Professor Adjunto da área de Saneamento da Universidade Estadual de Maringá – UEM.

**Luiz Di Bernardo**

Engenheiro Civil. Professor Titular da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo (EESC/USP).

**Endereço<sup>(1)</sup>:** Av. Ângelo Moreira da Fonseca, 1800 Bairro: Zona VII CEP: 87506-370. Umuarama-PR Fone (44)-3621-9314. Email: [abotari@uem.br](mailto:abotari@uem.br)

### RESUMO

A filtração ascendente é um dos processos utilizados no tratamento de água para fins de abastecimento. Conhecer os mecanismos de remoção de partículas por meio de um modelo matemático constitui-se em ferramenta útil para o estudo, previsão e controle do processo de filtração. Modernamente, os modelos matemáticos que descrevem macroscopicamente o processo de filtração consideram tanto a aderência como o desprendimento de partículas que ocorrem simultaneamente no meio filtrante. Este trabalho propõe e analisa um modelo matemático utilizando-se uma análise macroscópica do processo de filtração em termos da remoção de partículas monodispersa, ou seja, com partículas de mesmos diâmetros médios, ocorrida durante o ciclo de filtração no contexto das tecnologias de tratamento de água que utilizam a filtração ascendente. Serão utilizados dados experimentais de filtração direta encontrados na literatura para a validação do modelo bem como para avaliar a adequação do mesmo em descrever o processo de filtração ascendente na remoção de uma polidispersão de sobrenadante de caulinita na água bruta.

**PALAVRAS-CHAVE:** Modelação matemática, filtração ascendente, remoção de partículas, mono e polidispersão.

### INTRODUÇÃO

A filtração consiste na remoção de partículas, de colóides e de microrganismos que se encontram presentes na água que escoar através de um meio poroso. Geralmente este é um processo que ocorre na parte final da remoção de impurezas propiciada por uma ETA em ciclo completo.

O processo de filtração pode ainda ser encontrada associada a tecnologia da Dupla Filtração, onde a água bruta recebe o coagulante e é encaminhada diretamente aos filtros ascendentes (de areia grossa ou pedregulho) e então seu afluente é encaminhada para os filtros rápidos descendentes. E outra tecnologia de tratamento de água que utiliza extensivamente o processo de filtração é a Filtração em Múltiplas Etapas (FiME), largamente utilizada na Colômbia, por exemplo.

Para a obtenção de um modelo matemático é importante a obtenção de dados em escala experimental sob condições bem definidas e controladas. Os modelos que descrevem macroscopicamente o processo de filtração e que incluem, por exemplo, o mecanismo de desprendimento de partículas do meio filtrante durante a filtração e como este parâmetro altera as forças de aderência entre as partículas e estas com o grão coletor constitui-se importante ferramenta para a compreensão deste processo.

O objetivo deste trabalho é propor um Modelo Matemático para a descrição do comportamento da filtração ascendente em leito com multicamadas não uniformes ou camada única associado a um processo de filtração sob diferentes taxas na remoção de partículas de diferentes tamanhos.

## METODOLOGIA

As partículas pequenas são capturadas pelo grão ou coletor do filtro, por partículas de seu próprio tamanho e por partículas maiores (média e grande) previamente capturadas. As partículas médias são coletadas por partículas de seu próprio tamanho, pelo coletor e por partículas maiores (grandes), ao passo que as partículas grandes são coletadas por partículas de seu próprio tamanho e pelo coletor. Seja  $n$  o número de tamanhos de partículas encontradas na suspensão ( $dp_1 > dp_2 > \dots > dp_n$ ), representadas pela fração  $\gamma$  que considera as partículas maiores como coletores adicionais para partículas menores, tem-se, portanto, a eficiência de remoção para cada tamanho de partícula. Para cada tamanho de partícula obtêm-se os parâmetros  $\eta\alpha_o^k$ ,  $\beta\eta\alpha_p^k$ ,  $\beta_2^k$ . Portanto, o conjunto de equações do modelo para polidispersão, para cada tamanho de partícula, será conforme as eq. de (1) a (7) (VIGNESWARAN & CHANG, 1989), (TOBIASON & VIGNESWARAN, 1994) e (LEVEAU, 2001):

$$\frac{\partial n(z, t)}{n(z, t)} = -\frac{3}{2} \left( \frac{1 - f_0}{d_c(z)} \right) \eta^k(z, t) \partial z$$

(1)

$$\eta^k(z, t) = \eta\alpha_o^k + N_L^p \beta\eta_p \alpha_p^k \left( \frac{d_p^k}{d_c(z)} \right)^2 + \gamma \sum_{i=1}^{k-1} N_L^i \beta\eta_p \alpha_p^i \left( \frac{d_p^i}{d_c(z)} \right) - \frac{J(z, t)}{U \frac{\pi}{4} d_c^2(z) n(z, t)} \sum_{i=1}^p \beta_2^i N_p^i \quad (2)$$

$$\frac{\partial N_L^k(z, t)}{\partial t} = \eta\alpha_o^k \frac{\pi}{4} d_c^2(z) U n(z, t)$$

(3)

$$\frac{\partial N_p^i(z, t)}{\partial t} = \eta(z, t) \frac{\pi}{4} d_c^2(z) U n(z, t)$$

(4)

$$N_c(z) = \left[ \frac{6(1 - f_0)}{\pi d_c(z)^3} \right]$$

(5)

$$f(z, t) = 1 - \left\langle (1 - f_0) \left\{ 1 + \sum_{k=1}^p N_p^k(z, t) \frac{[d_p^k / d_c(z)]^3}{(1 - f_d)} \right\} \right\rangle$$

(6)

$$J(z, t) = \left\{ \begin{aligned} & k_{h1} \left( \frac{\mu}{\rho_f g} \right) \left[ \frac{(1-f)^2}{f(z, t)^3} \right] \left( \frac{S_c^2}{d_c(z)^2} \right) \left[ \frac{1 + \beta' \sum_{k=1}^p \left( \frac{N_p^k(z, t)}{N_c(z)} \right) \left( \frac{d_p^k}{d_c(z)} \right)^2 \left( \frac{S_c}{S_p^k} \right)^2}{1 + \sum_{k=1}^p \left( \frac{N_p^k(z, t)}{N_c(z)} \right) \left( \frac{d_p^k}{d_c(z)} \right)^3 \left( \frac{S_c}{S_p^k} \right)^3} \right]^2 U + \\ & + k_{h2} \left( \frac{1}{g} \right) \left( \frac{1-f}{f(z, t)^3} \right) \left( \frac{S_c}{d_c(z)} \right) \left[ \frac{1 + \beta' \sum_{k=1}^p \left( \frac{N_p^k(z, t)}{N_c(z)} \right) \left( \frac{d_p^k}{d_c(z)} \right)^2 \left( \frac{S_c}{S_p^k} \right)^2}{1 + \sum_{k=1}^p \left( \frac{N_p^k(z, t)}{N_c(z)} \right) \left( \frac{d_p^k}{d_c(z)} \right)^3 \left( \frac{S_c}{S_p^k} \right)^3} \right] U^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Em que:  $\varepsilon$  é a porosidade,  $\varepsilon_0$  é a porosidade do leito limpo,  $\varepsilon_d$  é a porosidade do depósito,  $d_p$  é o diâmetro da partícula,  $d_g$  é o diâmetro do grão,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta_2$ , são constantes dependentes ou da condição inicial ou das condições de contorno,  $\beta'$  é a fração do depósito que contribui com a perda de carga,  $\eta$  eficiência do coletor,  $\eta_p$  eficiência da partícula funcionando como coletor,  $S_g$  é um fator de forma do grão coletor,  $S_p$  é um fator de forma da partícula,  $N$  é o número de partículas coletadas pelos grãos coletores ( $N = \beta N_s$  e  $\beta$  é a fração de partículas já coletadas e que servem como coletores adicionais) e  $N_p$  é o número total de partículas coletadas pelo grão ( $N_p N_g = N_b$  e  $N_b$  é o número de partículas coletadas por unidade de volume de leito;  $N_g = (1-\varepsilon_0)/6\pi d_g^3$ ).

Na discretização para a resolução das equações acima mencionadas, temos:

- Para número de partículas efluente e afluente:

$$n_{i+1,j} = \sum_{j=1}^t n_{i,j-1} \exp \left\{ -\frac{3}{2} \left( \frac{1-f_0}{d_{ci}} \right) \eta_{i,j-1} \Delta z \right\} \quad (8)$$

- Para a eficiência global de remoção que inclui o total de partículas removidas, subtraindo-se as partículas desprezadas:

$$\eta_{i,j+1} = \eta_0 \alpha_0 + N_{L\ i,j+1} \beta \eta_p \alpha_p \cdot \left( \frac{d_p}{d_{ci}} \right)^2 - \beta_2 \cdot J_{i,j} \frac{N_{p\ i,j}}{U \frac{\pi}{4} d_{ci}^2 n_{i,j}} \quad (9)$$

- Para número de partículas removidas (coletadas) por outras partículas:

$$N_{L\ i,j} = N_{L\ i,j-1} + \eta_0 \alpha_0 \frac{\pi}{4} d_{ci}^2 U n_{i,j} \Delta t \quad (10)$$

- Para número total de partículas removidas (coletadas) pelo coletor:

$$N_{p\ i,j} = N_{p\ i,j-1} + \eta_{i,j} \frac{\pi}{4} \overline{d_{ci}}^2 U n_{i,j} \Delta t$$

(11)

- Número de coletores (meio filtrante):

$$N_{ci} = \left[ \frac{6(1-f_0)}{\pi \overline{d_{ci}}^3} \right]$$

(12)

- Variação na porosidade:

$$f_{i,j} = 1 - \left\{ (1-f_0) \left( 1 + N_{p\ i,j} \frac{\left( \overline{d_p} / \overline{d_{ci}} \right)^3}{(1-f_d)} \right) \right\}$$

(13)

- Perda de carga unitária:

$$J_{i,j} = \left\{ k'_{h1} \left( \frac{\mu}{\rho_f g} \right) \left[ \frac{(1-f_{i,j})^2}{f_{i,j}^3} \right] \left[ \frac{S_c^2}{\overline{d_{ci}}^2} \right] \frac{1 + \beta' \left( \frac{N_{p\ i,j}}{N_{ci}} \right) \left( \frac{\overline{d_p}}{\overline{d_{ci}}} \right)^2 \left( \frac{S_c}{S_p} \right)^2}{1 + \left( \frac{N_{p\ i,j}}{N_{ci}} \right) \left( \frac{\overline{d_p}}{\overline{d_{ci}}} \right)^3 \left( \frac{S_c}{S_p} \right)^3} U + \right. \\ \left. + k'_{h2} \left( \frac{1}{g} \right) \left( \frac{1-f_{i,j}}{f_{i,j}^3} \right) \left( \frac{S_c}{\overline{d_{ci}}} \right) \frac{1 + \beta' \left( \frac{N_{p\ i,j}}{N_{ci}} \right) \left( \frac{\overline{d_p}}{\overline{d_{ci}}} \right)^2 \left( \frac{S_c}{S_p} \right)^2}{1 + \left( \frac{N_{p\ i,j}}{N_{ci}} \right) \left( \frac{\overline{d_p}}{\overline{d_{ci}}} \right)^3 \left( \frac{S_c}{S_p} \right)^3} U^2 \right\}$$

(14)

- As condições iniciais são:

$$J_i(z,0) = \left\{ k'_{h1} \left( \frac{\mu}{\rho_f g} \right) \left[ \frac{(1-f_0)^2}{f_0^3} \right] \left[ \frac{S_c^2}{\overline{d_{ci}}^2} \right] U + k'_{h2} \left( \frac{1}{g} \right) \left( \frac{1-f_0}{f_0^3} \right) \left( \frac{S_c}{\overline{d_{ci}}} \right) U^2 \right\}; N_{Li}(z,0)=0;$$

$$\eta_i(z,0)=\eta_0\alpha_0 \text{ e } N_{pi}(z,0)=0.$$

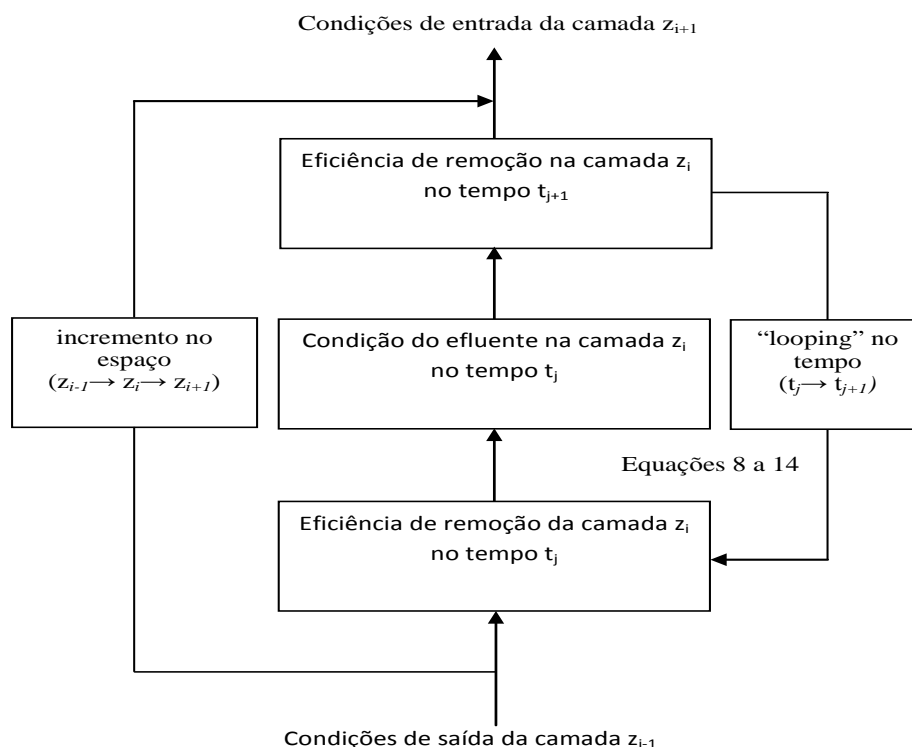
- A condição de contorno é:

$$n_{1j}(0, t) = n_0.$$

No início da filtração, considera-se o meio filtrante limpo, o que torna a eficiência de remoção bem conhecida, sendo igual a  $\eta_0\alpha_0$ . Portanto, a concentração de partículas no filtro também pode ser determinada ( $t = 0$ ) e é igual a  $n_0$ .

A partir de então, no próximo passo, considera-se que o total de partículas na posição  $n_{i+1,j}$  será o resultado da soma das partículas existentes na posição de entrada ( $n_{i,j}$ ) mais as partículas retidas na camada em questão ( $i$ ), conforme Figura 1.

A diferenciação no tempo ( $\Delta t$ ) e no espaço ( $\Delta z$ ) para uma dada camada do leito filtrante, conforme mostrado nas equações de (8) a (14), pode ser observada nas equações na forma:  $n_{i,j} = n(z_i, t_j)$ ,  $\eta_{i,j} = \eta(z_i, t_j)$ ,  $N_{i,j} = N(z_i, t_j)$



**Figura 1: Diagrama de blocos do funcionamento dos algoritmos dos modelos**

Para a obtenção dos dados experimentais foi utilizada um sistema de dupla filtração, onde obteve-se os dados do FAAG (Filtro Ascendente de Areia Grossa) que foi operado com uma água de estudo preparada com uma suspensão de caulinita, que era reservada em tanques dotados de agitadores, para posteriormente alimentarem a caixa de mistura de água bruta, onde recebia mais uma agitação, sendo então bombeada para a caixa de nível constante. A caixa de nível constante garantia a vazão desejada para o sistema, extravasando a vazão excedente que era encaminhada, através do retorno, para a caixa de mistura de água bruta. A vazão desejada para o sistema, oriunda da caixa de nível constante, descia para a caixa de mistura rápida e recebia o coagulante. A solução de sulfato de alumínio (coagulante) era bombeada do tanque de preparação para posteriormente ser encaminhada aos sistemas de filtração.

A contagem de partículas das amostras coletadas ao longo das camadas do FAAG alimentaram os dados de entrada do modelo, desde a camada suporte (com água bruta) até o topo da camada. Cada camada antecedente fornecia os dados de número de partículas para a camada subsequente. O número de partículas foi obtido pelas amostras coletadas ao longo do meio filtrante, na frequência de 3 horas, para a contagem do número de partículas por tamanho específico – Amostrador HIAC/ROYCO, modelo 3000 A e Contador HIAC/ROYCO, modelo 8000 A que utiliza o método de extinção de luz gerado por diodo a laser.

## RESULTADOS

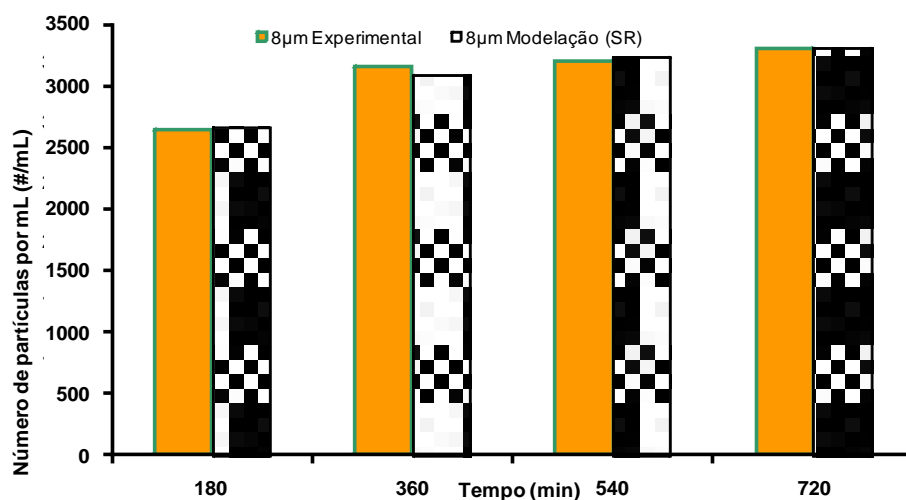
Os resultados obtidos pelo modelo de filtração monodisperso proposto para a remoção de partículas com base no número de partículas por unidade de volume ( $\#.\text{mL}^{-1}$ ) para diferentes tamanhos são elencadas nas Tabelas 1 a 4.

Os gráficos de barras das Figuras 2 a 5 apresentam o número de partículas por mL de forma pontual, nos instantes específicos de amostragem experimental durante o tempo (ciclo) de filtração, além dos respectivos valores experimentais e os resultados das simulações.

Todos os valores Do coeficiente de correlação múltipla obtido nas simulações apresentadas nas figuras 2 a 5 apresentam valores que variaram entre 0,9 e 1, o que indica que o modelo mostra-se adequado para descrever o fenômeno da filtração.

**Tabela 1: Quadro resumo das simulações**

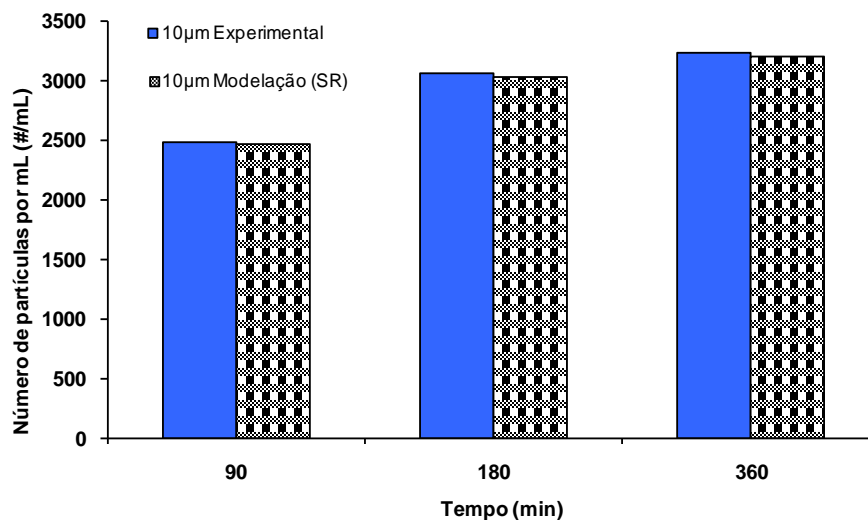
<b>Dados Experimentais e das Simulações</b>
Carreira ou Ciclo de filtração: ensaio 1; Camada do leito filtrante: C1
<b>Meio Poroso</b>
Profundidade ou espessura da camada (L) = 0,20 m; Diâmetro do Coletor (dc) (máx.) = 25,4 mm; (mín) = 15,9 mm; Fator de Forma = 7,5; Porosidade (f) = 0,40 (adimensional)
<b>Efluente e Condições Operacionais</b>
Fator de Forma (médio) = 12,3; Taxa de Filtração (U) = 180 $\text{m}^3.\text{m}^{-2}.\text{dia}^{-1}$ , Duração do ciclo ou carreira de filtração na modelação (t) = 720 min
Média do número de partículas por unidade de volume na água de estudo para o tamanho de partícula (diâmetro médio) de $8\mu\text{m}$ : 6199 partículas por mL
<b>Parâmetros do Modelo</b>
Para valor de $\eta_0\alpha_0$ experimental
$\eta_0\alpha_0 = 8,766.10^{-2}$ ; $\beta\eta_p\alpha_p = 114,7$ ; $\beta_2 (\text{s}^{-1}) = 2,528$ ; $\beta' = 1,790.10^{-3}$ e $R^2$ do modelo = 0,9735



**Figura 2: Perfil de remoção de partículas ao longo do tempo de filtração – Camada C1 do Ensaio 1**

**Tabela 2: Quadro resumo das simulações –Ensaio 2– Camada C2.**

<b>Dados Experimentais e das Simulações</b>	
Sistema de Filtração: II	
Carreira ou Ciclo de filtração: ensaio 2; Camada do leito filtrante: C2	
Meio Poroso	
Profundidade ou espessura da camada ( $L$ ) = 0,30 m; Diâmetro do Coletor ( $d_c$ ) (máx.) = 15,9 mm; (mín) = 9,6 mm; Fator de Forma = 7,5; Porosidade ( $f$ ) = 0,40 (adimensional)	
Efluente e Condições Operacionais	
Fator de Forma (médio) = 12,3; Taxa de Filtração ( $U$ ) = $180 \text{ m}^3 \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{dia}^{-1}$ , Duração do ciclo ou carreira de filtração na modelação ( $t$ ) = 360 min	
Média do número de partículas por unidade de volume na água de estudo para o seguinte tamanho de partícula (diâmetro médio) de $10 \mu\text{m}$ : 3238 partículas por mL	
Parâmetros do Modelo	
Para valor de $\eta_0 \alpha_0$ experimental	
$\eta_0 \alpha_0 = 3,064 \cdot 10^{-2}$ ; $\beta \eta_p \alpha_p = 3,254$ ; $\beta_2 (\text{s}^{-1}) = 2,880$ ; $\beta' = 5109,0$ e $R^2$ do modelo = 0,9971	

**Figura 3: Perfil de remoção de partículas ao longo do tempo de filtração – Camada C2 do Ensaio 2.****Tabela 3: Quadro resumo das simulações –Ensaio 3 – Camada C4.**

<b>Dados Experimentais e das Simulações (Modelo Monodisperso)</b>	
Sistema de Filtração: II	
Carreira ou Ciclo de filtração: ensaio 14; Camada do leito filtrante: C4 (Câmara 2)	
Meio Poroso	
Profundidade ou espessura da camada ( $L$ ) (m) = 0,50; Diâmetro do Coletor ( $d_c$ ) (máx.) = 4,80 mm; (mín) = 2,40 mm; Fator de Forma = 7,7; Porosidade ( $f$ ) = 0,40 (adimensional)	
Efluente e Condições Operacionais	
Fator de Forma (médio) = 12,3; Taxa de Filtração ( $U$ ) = $180 \text{ m}^3 \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{dia}^{-1}$ Duração do ciclo ou carreira de filtração na modelação ( $t$ ) = 360 min	
Média do número de partículas por unidade de volume na água de estudo para o seguinte tamanho de partícula (diâmetro médio) $2 \mu\text{m}$ : 6406 partículas por mL	
Parâmetros do Modelo	
Para valor de $\eta_0 \alpha_0$ experimental	
$\eta_0 \alpha_0 = 3,592 \cdot 10^{-3}$ ; $\beta \eta_p \alpha_p = 1,000$ ; $\beta_2 (\text{s}^{-1}) = 0,5764$ ; $\beta' = 0,1790$ e $R^2$ do modelo = 0,9845	

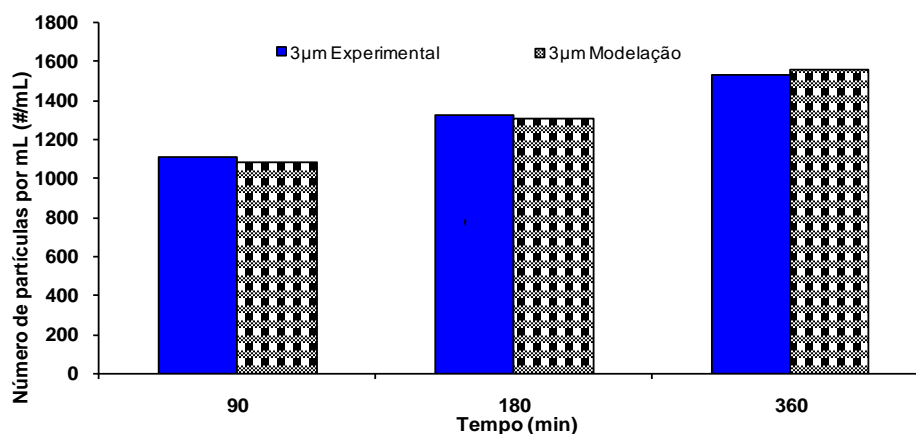


Figura 4: Perfil de remoção de partículas ao longo do tempo de filtração – Camada C4 do Ensaio 3.

Tabela 4: Quadro resumo das simulações – Sistema 1 – Ensaio 4 – Camada C3.

<i>Dados Experimentais e das Simulações (Modelo Monodisperso)</i>
Sistema de Filtração: I
Carreira ou Ciclo de filtração: ensaio 4; Camada do leito filtrante: C3 (Câmara 2)
Valores experimentais de número de partículas por mL: Tabela B3.6 do APÊNDICE B
Meio Poroso
Profundidade ou espessura da camada ( $L$ ) = 0,55 m; Diâmetro do Coletor ( $d_c$ ) (máx.) = 25,4 mm; (mín) = 3,36 mm; Fator de Forma = 7,5; Porosidade ( $f$ ) = 0,40 (adimensional)
Efluente e Condições Operacionais
Fator de Forma (médio) = 12,3; Taxa de Filtração ( $U$ ) = 180 m <sup>3</sup> .m <sup>-2</sup> .dia <sup>-1</sup>
Duração do ciclo ou carreira de filtração na modelação ( $t$ ) = 1860 min
Média do número de partículas por unidade de volume na água de estudo (#.mL <sup>-1</sup> ) (Água Tipo I) para o seguinte tamanho de partícula (Diâmetro médio) de 6 µm: 5339
Parâmetros do Modelo
$\eta_0\alpha_0 = 1,893.10^{-2}$ ; $\beta\eta_p\alpha_p = 12,34$ ; $\beta_2$ (s <sup>-1</sup> ) = 0,4076; $\beta' = 7,871.10^{-8}$ ; R <sup>2</sup> do modelo = 0,8944



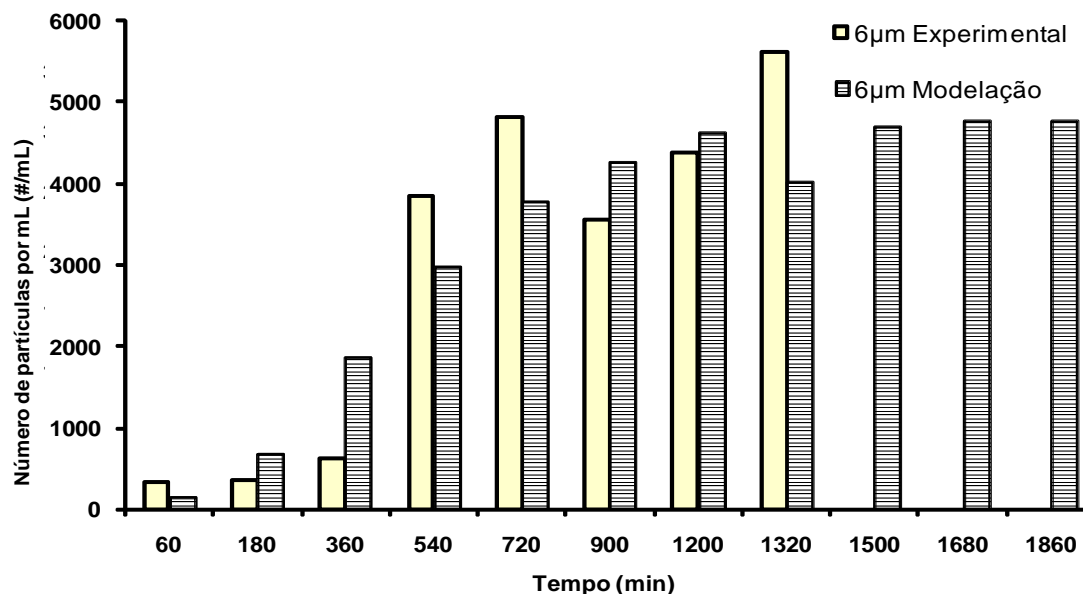


Figura 5: Perfil de remoção de partículas ao longo do tempo de filtração – Camada C3 do Ensaio 4.

Obs: Não foi possível modelação após os 1320 minutos em função da ocorrência de transpasse na filtração – modelo não contempla transpasse.

## CONCLUSÃO

Conforme observado pelo exposto nos resultados, o modelo monodisperso de remoção de partículas obteve valores significativos dos coeficientes de correlação múltipla para as camadas simuladas pelo modelo, entre 89 e 99% de correlação.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. LEVEAU, S. (2001). Deep Bed Filtration: Analysis and Modeling. Atlanta, U.S.A.. 167p. Master of Science Thesis – **Georgia Institute of Technology**.
2. TOBIASON, J. E.; VIGNESWARAN, B. (1994) Evaluation of a Modified Model for Deep Bed Filtration. **Water Research**. v. 28. n. 2, pp.: 335-342.
3. VIGNESWARAN, B.; CHANG, J. S. (1989) Experimental Testing of Mathematical Models Describing the Entire Cycle of Filtration. **Water Research**. v. 23. n. 11, pp.: 1413-1421.