

## **V-048 – AVALIAÇÃO DA DINÂMICA POPULACIONAL USANDO OS MODELOS DE MALTHUS E VERHULST: ESTUDO DE CASO DA POPULAÇÃO DE SANTARÉM - PA**

**Mariano Vieira dos Santos<sup>(1)</sup>**

Graduando em Engenharia Ambiental pelo Instituto de Educação, Agricultura e Ambiente IEAA/UFAM.

**Evanizio Marinho de Menezes Júnior<sup>(2)</sup>**

Graduado pela Universidade Federal de Rondônia – UNIR. Pós-graduado em Matemática pela Universidade Federal de Rondônia – UNIR. Mestrado em Matemática pela Universidade Federal de Rondônia – UNIR. Doutor em Física Ambiental pela Universidade Federal do Mato Grosso – UFMT na área Análise e Modelagem Microclimática e de Ecologia e Ecossistemas. Professor efetivo na Universidade Federal do Amazonas – UFAM.

**Viviane Pereira do Nascimento<sup>(3)</sup>**

Graduanda em Agronomia pelo Instituto de Educação, Agricultura e Ambiente IEAA/UFAM.

**Hilma Magalhães de Oliveira<sup>(4)</sup>**

Graduada em Engenharia Ambiental pelo Instituto de Educação, Agricultura e Ambiente IEAA/UFAM.

**Tatiana Acácio da Silva<sup>(5)</sup>**

Graduada em Engenharia Ambiental pelo Instituto de Educação, Agricultura e Ambiente IEAA/UFAM.

**Endereço<sup>(1)</sup>:** Rua K, 2034 – São Cristóvão - Humaitá - AM - CEP: 69800-000 - Brasil - Tel: (97) 8412-3856 - e-mail: [mariano\\_vieira@hotmail.com](mailto:mariano_vieira@hotmail.com)

### **RESUMO**

O uso de modelos matemáticos vem crescendo ao longo dos últimos anos, tais modelos matemáticos são utilizados para a compreensão de problemas do nosso cotidiano. Como exemplo, temos os modelos de dinâmica populacional, que representam o comportamento de uma determinada população através de equações diferenciais ordinárias. Este trabalho tem por objetivo analisar a dinâmica populacional na cidade de Santarém no estado do Pará usando os modelos matemáticos propostos por Thomas Malthus e Pierre-François Verhulst, visando comparar os dados obtidos e fazer uma previsão do número de habitantes de Santarém nos próximos anos através dos modelos matemáticos utilizados. Contudo as simulações realizadas para os anos de 2015 e 2020 nos permitiram constatar que o modelo de Verhulst foi o mais adequado para projeções no intervalo de cinco anos para a população considerada, conforme se verificou nos modelos aplicados.

**PALAVRAS-CHAVE:** Dinâmica Populacional, Modelos Matemáticos, Equações Diferenciais Ordinárias.

### **INTRODUÇÃO**

O conceito básico para modelagem matemática de populações é o “tamanho da população”. E dependendo da população em estudo este é expresso de diferentes formas tais como: número de indivíduos, peso, volume, massa, densidade e até porcentagem de uma dessas medidas (ALMEIDA, 2003). O estudo da dinâmica populacional é de suma importância no que concerne à sociedade, seja nos fatores econômicos, políticos ou socioculturais (SETI, et al., 1999).

Para realizar a verificação da dinâmica populacional vários são os modelos matemáticos utilizados. Existem diversas teorias para o estudo da variação da população com o tempo, dentre as mais importantes destacam-se: Teoria de Malthus (1798) e Modelo estatístico de Verhulst (1838).

O estudo matemático de dinâmica de populações surgiu em 1798, quando foi publicado o artigo “An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society” pelo economista e demógrafo britânico Thomas Robert Malthus (RAFIKOV, 2003). O modelo de Malthus, também conhecido por modelo Malthusiano, gerou polêmica no início do século XIX, pois segundo ele a população mundial crescia apenas em proporção geométrica, enquanto os meios de sobrevivência cresciam apenas em proporção aritmética. Logo, a população seria controlada por miséria, fome e muitas outras coisas da natureza (Rocha e Botta, 2009).

O outro modelo bastante conhecido foi proposto pelo matemático belga Pierre-François Verhulst, que introduziu uma equação como um modelo de crescimento da população humana, em 1838, seguindo a formulação moderna (ALMEIDA, 2003).

Ainda de acordo com Rocha e Botta (2009), ressalva que o modelo de Verhulst ou modelo logístico como é conhecido, foi apresentado no ano de 1837 e sugere que o crescimento da população é limitado por um fator logístico. O mesmo refere-se à capacidade de sustentação do meio ambiente e supõe que uma população, vivendo num determinado meio, crescerá até um limite sustentável, de modo a obter uma estabilidade. A equação incorpora a queda do crescimento da população que está sujeita a um fator inibidor.

De acordo com Almeida (2003), Verhulst não pôde testar a exatidão do seu modelo devido os dados censitários serem inadequados, deste modo não provocou muita atenção, até muitos anos depois. Assim sendo, seu trabalho foi pouco conhecido durante toda a sua vida, e ele morreu na obscuridade.

## OBJETIVO

Verificar a dinâmica populacional urbana da cidade de Santarém-PA, de acordo com os modelos matemáticos de Thomas Malthus e Pierre-François Verhulst.

## MATERIAIS E MÉTODOS

A área de estudo consiste no município de Santarém, localizado no estado do Pará, que possui uma população estimada, segundo o Departamento de Informática do SUS – DATASUS no ano de 2015 em aproximadamente 306.520 habitantes e uma área territorial, de acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia – IBGE no ano de 2016, em 17.898,389 km<sup>2</sup>. Fundada em 22 de junho de 1661, Santarém é uma das cidades mais antigas da região Amazônica. Em 1758 foi elevada à categoria de vila e quase um século depois, em consequência de seu notável desenvolvimento, foi elevada à categoria de cidade em 24 de outubro de 1848. Santarém está localizado sob as seguintes coordenadas Longitude: -54.6987 2° 26' 22" Sul, 54° 41' 55" Oeste (Figura 1).

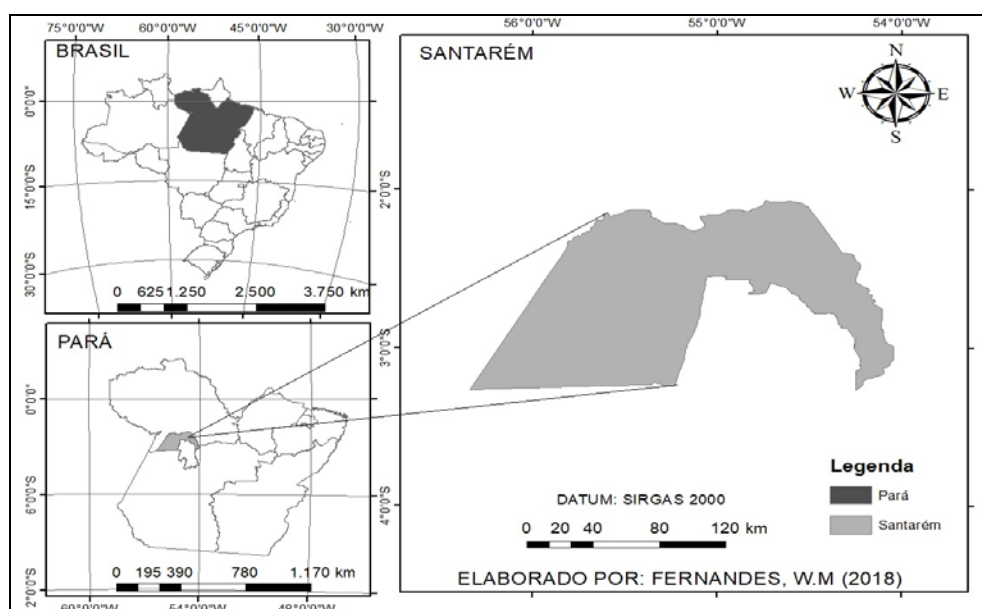


Figura 1: Localização do Município de Santarém – PA. Fonte: Própria autoria

## MODELOS MATEMÁTICOS

Os modelos utilizados para o cálculo populacional do município de Santarém – PA consistem em utilizarmos os modelos de Thomas Malthus e Pierre François Verhulst entre os anos de 2010 a 2015.

## MODELO DE MALTHUS

O modelo de Malthus afirma que uma população cresce em progressão geométrica enquanto sua subsistência cresce apenas em progressão aritmética. Essa variação do tamanho da população é determinada unicamente pelo número de nascimentos e mortes, sem levar em consideração processos imigratórios ou outros fatores que possam inibir seu crescimento durante um intervalo de tempo. Isso pode ser representado da seguinte forma:

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)N(t) \Rightarrow N(t) = N_0 e^{(\alpha - \beta)t}$$

onde:

$\alpha$  = taxa de natalidade e

$\beta$  = taxa de mortalidade

Sabe-se que

1) se  $\alpha > \beta$ , então,  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \infty$  (Figura 2.a)

2) se  $\alpha = \beta$ , então,  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = N_0$  (Figura 2.b)

3) se  $\alpha < \beta$ , então,  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0$  (Figura 2.c)

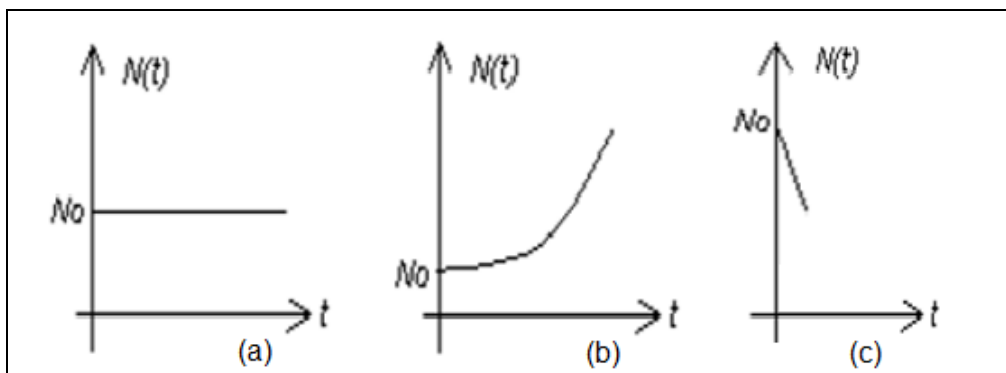


Figura 2- Crescimento Populacional em função do tempo, segundo o modelo de Thomas Malthus. Fonte: (SETI, et al., 1999).

## DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

### MODELO DE VERHULST

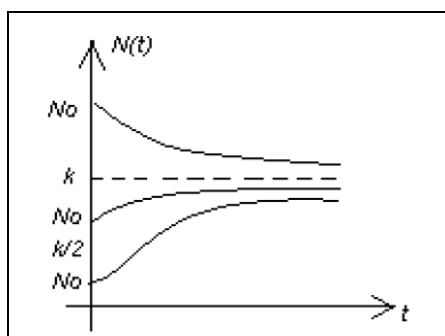
O modelo proposto por Verhulst afirma que em baixa densidade a população cresce exponencialmente, e à medida que os recursos vão se tornando mais escassos, seu crescimento tende a diminuir devido a um fator chamado de capacidade ambiental de sustentação. Esse fator inibiria o crescimento à medida que o tempo passasse, mostrando a população limite da região.

Onde temos a seguinte equação

$$\frac{dN}{dt} = \alpha \left( 1 - \frac{N(t)}{k} \right) N(t) \Rightarrow N(t) = \frac{N_0 k}{N_0 + (k - N_0) e^{-\alpha t}}$$

Onde, supondo  $\alpha > 0$ , tem-se:

- 1) se  $N_0 > k$ , a função  $N(t)$  decresce vagarosamente para  $k$  (Figura 3)
- 2) se  $N_0 < k$ , a função  $N(t)$  cresce vagarosamente para  $k$  (Figura 3)



**Figura 3 - Crescimento populacional em função do tempo, segundo o modelo de Pierre Verhulst. Fonte: (SETI, et al., 1999).**

Os cálculos dos parâmetros  $a$  e  $b$  foram determinados pela média aritmética das taxas anuais de natalidade e mortalidade, respectivamente, relativas ao período de 2010 a 2015, resultando na taxa de crescimento  $\alpha = \alpha - \beta = 0,013062803.1$ . A constante logística  $k$  foi determinada pela comparação entre a linearização do modelo de Verhulst e o ajuste linear dos dados reais pelo método dos mínimos quadrados.

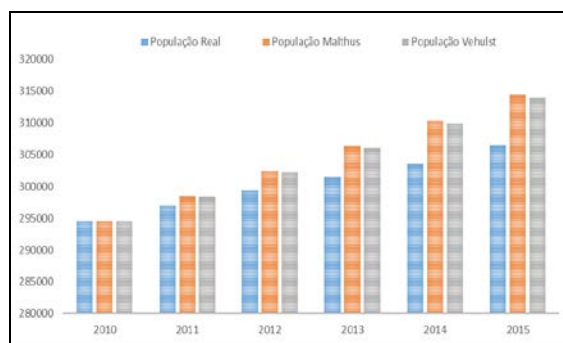
O valor encontrado para  $k$  que permitiu o melhor ajuste do modelo foi  $k=12135296,04$ . Utilizando os parâmetros  $a$  e  $k$ , foram calculadas as populações dos anos de 2010 a 2015, segundo os modelos adotados. Esses resultados encontram-se na Tabela 1 e estão ilustrados no Gráfico 1.

Ao aferir os resultados da Tabela 1, nota-se que os modelos Malthus e Verhulst retratam adequadamente excelentes dados comparando com o processo real da dinâmica populacional urbana do município de Santarém no período de 2010 a 2015. Dessa forma, o cálculo de erro amostral aplicado para o modelo de crescimento populacional de Malthus, expressou o valor de 1,28%. Já para o modelo de Verhulst, o erro amostral foi de 1,20% uma vez que, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE considera aceitável a margem de erro até 5%.

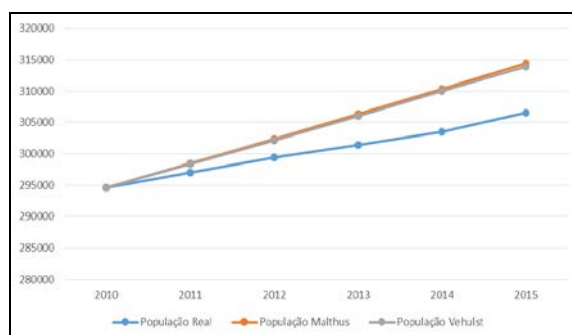
**Tabela 1. População real e população segundo os modelos de Malthus e Verhulst no período entre 2010/2015.**

| T | Ano  | População Real | População Malthus | População Verhulst |
|---|------|----------------|-------------------|--------------------|
| 0 | 2010 | 306520         | 294580            | 294580             |
| 1 | 2011 | 303521         | 298453            | 298358             |
| 2 | 2012 | 301462         | 302377            | 302183             |
| 3 | 2013 | 299419         | 306353            | 306056             |
| 4 | 2014 | 297040         | 310381            | 309977             |
| 5 | 2015 | 294580         | 314462            | 313948             |

À vista disso, determinados os parâmetros dos modelos que melhor descreveram a dinâmica da população do município de Santarém no período considerado, realizaram-se simulações com a evolução do crescimento populacional para os respectivos anos é ilustrado no Gráfico 1, bem como, projeções segundo os modelos de Malthus e Verhulst para o período de 2010 a 2015 no Gráfico 2.



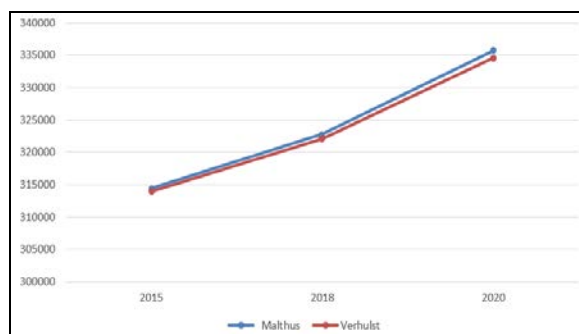
**Gráfico 1 – Evolução do crescimento populacional de Santarém – PA em função do tempo, segundo o modelo de Malthus e Verhulst**



**Gráfico 2 - Projeções da população de Santarém – PA entre o período de 2010 a 2015.**

Os dados obtidos através dos cálculos para os respectivos anos, utilizando os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst, tornou-se possível realizar uma projeção da população de Santarém – PA a partir do último dado referente a 2015, na qual, apresentou uma população estimada para o modelo de Malthus de 314.462 habitantes, e para o modelo de Verhulst 313.948 habitantes.

Nesse seguimento, através dos modelos de crescimentos populacionais utilizados, foram estimados dados para o ano de 2018, em que, o modelo de Malthus denota uma população de 322.786 habitantes, e o modelo de Verhulst 322.037 habitantes. Por fim, para o último ano proposto de 2020, o modelo de Malthus aponta uma população estimada de 335.686 habitantes, e o modelo de Verhulst 334.553 habitantes, onde se torna possível observar essa diferença no Gráfico 3.



**Gráfico 3- Projeções da população de Santarém – PA entre o período de 2010 a 2015.**

Contudo, o modelo de crescimento populacional de Verhulst é o que mais se aplica ao município de Santarém no Pará. Visto que, com base na população real de 2015, as projeções aplicadas para os anos de 2018 e 2020 o modelo populacional de Verhulst foi o que mais se aproximou e se adequou comparando com a população real de 2015.

## CONCLUSÕES

Em virtude dos fatos mencionados com relação à dinâmica da população urbana do município de Santarém – PA, satisfatoriamente ficou bem representado pelos modelos matemáticos de Malthus e Verhulst no período analisado de 2010 a 2015.

Considerando essas premissas, há diversos fatores que influenciam no crescimento populacional como tais como: a queda nos índices de mortalidade, campanhas de saúde pública e de vacinação que reduziram as doenças e a mortalidade infantil. Com isso tudo acaba aumentando a taxa de natalidade (nascimento) e diminuindo a de mortalidade (morte), e também é determinado por diversos fatores limitantes e que planejamentos sociopolítico-econômicos são feitos em períodos de quatro anos e migração.

Contudo, as simulações realizadas para os anos de 2015 e 2020 nos permitiram constatar que o modelo de Verhulst foi o mais adequado para projeções no intervalo de cinco anos para a população considerada, conforme se verifica na Tabela 1 e no Gráfico 3.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ALMEIDA, I. A. Aplicação dos Modelos de Malthus e Verhulst de Dinâmica Populacional à População do Brasil. Catalão – GO, 2003.
2. Departamento de Informática do SUS – DATASUS. Disponível em: <http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/defthtm.exe?ibge/cnv/poppa.def>. Acesso em: 26 de março de 2018. Instituto Brasileiro de Geografia – IBGE. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pa/santarem/panorama>. Acesso em: 07 de abril de 2018.
3. RAFIKOV, M. M. Notas do Minicurso: Aplicação dos modelos matemáticos no controle de populações. Departamento de Matemática/ UFSC, 2003.
4. ROCHA, N. C.; BOTTA, V. Dinâmica populacional aplicada à população de Adamantina. Rev. OMNIA EXATAS, v.2, n.2, 56-65, Janeiro/junho de 2009.
5. SETI, B. D. et al. Estudo da dinâmica populacional usando os modelos de Malthus e Verhulst: uma aplicação à população de passo fundo. Revista Teoria e Evidência Econômica. v. 7, n. 12 (1999).